

Rynkowa wycena egzotycznych instrumentów pochodnych kursów walutowych – opcje barierowe

Ewa Kijewska

BRE Bank

16 maja 2008

- 1 Wstęp
- 2 Walutowa Opcja Barrierowa – charakterystyka instrumentu
- 3 Wycena
- 4 Uśmiech zmienności (Volatility smile)
- 5 Metodologia Vanna-Volga pricing
- 6 Problemy

Wstęp

Opcja Barrierowa – charakterystyka instrumentu

- opcja egzotyczna, której wykonanie zależy od tego czy cena instrumentu bazowego osiągnie lub przekroczy wyznaczony poziom
- dzielimy je na opcje z barierą wejścia (knock-in) i wyjścia (knock-out)
 - opcja z barierą wejścia uaktywnia się po przekroczeniu ustalonej bariery
 - opcja z barierą wyjścia dezaktywuje się po przekroczeniu ustalonej bariery
- najczęściej spotykane opcje to jedno- lub dwubarierowe
- bariera może trwać w trakcie całego okresu obowiązywania kontraktu lub jedynie w części (tzw. okno)

Walutowa Opcja Barrierowa

- Instrumentem podstawowym jest kurs wymiany walut CCY1/CCY2
- Dwie bariery poziomu kursu walutowego: górna i dolna, których przekroczenie skutkuje aktywacją lub dezaktywacją opcji
- Regular barrier option, reversed barrier option – pojęcie zależne od tego, czy w momencie uderzenia w barierę opcja jest opcją w pieniądzu czy nie
- Monitoring bariery dyskretny lub ciągły
- Dwie strony kontraktu

Strona zajmująca pozycję dłużą ma prawo do kupna/sprzedaży N jednostek waluty CCY1 po określonej cenie K , w ustalonej chwili w przyszłości, pod warunkiem, że kurs wymiany walutowej nie przekroczy bariery (knock-out) lub gdy kurs przekroczy barierę (knock-in)

Walutowa Opcja Barrierowa

- Podział opcji barierowych ze względu na pozycję bariery względem ceny spot

- Down-And-In** – opcja staje się aktywna, gdy kurs spot przekroczy barierę

$$(S_T - K)_+ \mathbb{1}_{\{\inf_t S_t < H\}} \text{ dla } S > H$$

- Down-And-Out** – opcja staje się nieaktywna, gdy kurs spot przekroczy barierę

$$(S_T - K)_+ \mathbb{1}_{\{\inf_t S_t > H\}} \text{ dla } S > H$$

- Up-And-In** – opcja staje się aktywna, gdy kurs spot przekroczy barierę

$$(S_T - K)_+ \mathbb{1}_{\{\sup_t S_t < H\}} \text{ dla } S > H$$

- Up-And-Out** – opcja staje się nieaktywna, gdy kurs spot przekroczy barierę

$$(S_T - K)_+ \mathbb{1}_{\{\sup_t S_t > H\}} \text{ dla } S > H$$

Walutowa Opcja Barrierowa

- Cena opcji barierowej zależy od następujących czynników ryzyka:
 - wartości kursu wymiany walutowej CCY1/CCY2
 - struktury terminowej stóp procentowych dla walut CCY1 i CCY2
 - struktury terminowej zmienności kursu CCY1/CCY2
 - struktury terminowej zmienności stóp procentowych
 - korelacji pomiędzy kursem a stopami procentowymi
- Nieciągła wypłata
- Wrażliwość na uśmiech zmienności

Wycena

- Wybór modelu – cena teoretyczna
 - dynamika instrumentu podstawowego
 - różne modele – różne ceny teoretyczne (w praktyce możliwość arbitrażu)
 - różna złożoność obliczeniowa w różnych modelach
- Cena rynkowa – kwotowana na rynku

Wycena

Cel: Znaleźć model, w którym cena instrumentu wycenianego i cena rynkowa będą zgodne

Po co wycena z modelu?

- żeby wiedzieć ile dany instrument jest warty przy zawieraniu transakcji
- do celów księgowych
- do pomiaru wrażliwości na czynniki ryzyka
- do zarządzania ryzykiem

Wycena teoretyczna – model Blacka-Scholesa

- Jaki model teoretyczny wybrać? Dwa podejścia:
 - Opisujący w sposób jak najbardziej realistyczny dynamikę instrumentu podstawowego (często złożony obliczeniowo)
 - Prosty model + Korekta
- Model Blacka-Scholesa
 - prosty obliczeniowo
 - nie uwzględnia uśmiechu zmienności
 - stała zmienność
 - stałe stopy procentowe
 - nie uwzględnia ryzyk specyficznych
 - ryzyko kredytowe
 - ryzyko płynności
- Korekta
 - od czego powinna zależeć wielkość korekty?
 - parametry charakteryzujące wrażliwość opcji na zmianę zmienności (stochastyczna zmienność)

Uśmiech zmienności (Volatility smile)

- Zależność zmienności implikowanej od ceny wykonania (dla opcji walutowych od delty opcji)
- Stochastyczna zmienność dla opcji walutowych

Podstawowe strategie

- At The Money (ATM)

$$call(S, \Delta_0, \sigma_0, r_d, r_f, T)$$

- określa poziom zmienności
- Risk Reversal (RR)

$$call(S, \Delta^+, \sigma_{\Delta}^+, r_d, r_f, T) - put(S, \Delta^-, \sigma_{\Delta}^-, r_d, r_f, T)$$

- określa stopień "skośności" uśmiechu zmienności
- Butterfly (BF)

$$0.5 * (call(S, \Delta^+, \sigma_{\Delta}^+, r_d, r_f, T) + put(S, \Delta^-, \sigma_{\Delta}^-, r_d, r_f, T) - call(S, \Delta_0, \sigma_0, r_d, r_f, T) - put(S, \Delta_0, \sigma_0, r_d, r_f, T))$$

- określa stopień "wypukłości" uśmiechu zmienności

Metodologia Vanna-Volga pricing

$$P = TV + p * OH$$

gdzie

- P – cena opcji barierowej uzyskana za pomoca metodologii Vanna-Volga pricing
- TV – cena opcji barierowej uzyskana z modelu Blacka-Scholesa przy zmienności ATM (theoretical value)
- p – prawdopodobieństwo "przeżycia" opcji barierowej (knock-out)
- OH – dodatkowy koszt hedgingu (overhedge) opcji barierowej uwzględniający uśmiech zmienności w porównaniu z kosztem hedgingu w modelu Blacka-Scholesa

Metodologia Vanna-Volga pricing

$$\mathbf{Vega} = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$$

⇒ mierzy wrażliwość wartości opcji na zmianę zmienności σ ceny instrumentu podstawowego

$$\mathbf{Volga} = \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2}$$

⇒ mierzy wrażliwość Vega na zmianę zmienności ceny instrumentu podstawowego

$$\mathbf{Vanna} = \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma \partial S}$$

⇒ mierzy wrażliwość Vega na zmianę ceny instrumentu podstawowego

Metodologia Vanna-Volga pricing

$$\text{ExoticVannaRatio} = \frac{B_{\sigma S}}{RR_{\sigma S}}$$

$$\text{ExoticVolgaRatio} = \frac{B_{\sigma\sigma}}{BF_{\sigma\sigma}}$$

$$\text{ValueOfRR} = RR(\sigma_{\Delta}) - RR(\sigma_0)$$

$$\text{ValueOfBF} = BF(\sigma_{\Delta}) - BF(\sigma_0)$$

$$\text{CostOfVanna} = \text{ExoticVannaRatio} * \text{ValueOfRR}$$

$$\text{CostOfVolga} = \text{ExoticVolgaRatio} * \text{ValueOfBF}$$

Metodologia Vanna-Volga pricing

$$CostOfVanna = \frac{B_{\sigma S}}{c_{\sigma S}(\sigma_{\Delta}^+) - p_{\sigma S}(\sigma_{\Delta}^-)} * (c(\sigma_{\Delta}^+) - c(\sigma_0) - p(\sigma_{\Delta}^-) + p(\sigma_0))$$

$$CostOfVolga = \frac{B_{\sigma\sigma}}{c_{\sigma\sigma}(\sigma_{\Delta}^+) - p_{\sigma\sigma}(\sigma_{\Delta}^-)} * \frac{(c(\sigma_{\Delta}^+) - c(\sigma_0) + p(\sigma_{\Delta}^-) - p(\sigma_0))}{2}$$

Metodologia Vanna-Volga pricing

Uzasadnienie

- portfel złożony z x jednostek strategii ATM, y jednostek Risk Reversal i z jednostek Butterfly

$$x * vega_{ATM} + y * vega_{RR} + z * vega_{BF} = vega_{BS}$$

$$x * volga_{ATM} + y * volga_{RR} + z * volga_{BF} = volga_{BS}$$

$$x * vanna_{ATM} + y * vanna_{RR} + z * vanna_{BF} = vanna_{BS}$$

Metodologia Vanna-Volga pricing

- Vanna-Volga adjusted value

$$OH = CostOfVanna + CostOfVolga$$

- Z modelu wyceniamy
 - cenę opcji regular knock-out

$$KO = TV + p * OH$$

- cenę opcji no-touch
- Z parytetu wyceniamy
 - cenę opcji reverse knock-out

$$RKO(\omega, K, B) = KO(-\omega, K, B) - KO(-\omega, B, B) + \omega * (B - K) * NT(B)$$

- cenę opcji regular knock-in




$$KI = Vanilla - KO$$

- cenę opcji reverse knock-in

$$RKO = Vanilla - RKO$$

Problemy

- Nieadekwatność metody do wyceny instrumentów o długim terminie do zapadalności (oparta o wrażliwości lokalne)
- Jakie delty stosować w strategiach Risk Reversal i Butterfly?
- Implementacja metody dla innych instrumentów wymaga weryfikacji
- Dla pewnych danych rynkowych może istnieć arbitraż, ujemne ceny
- Może dawać różne ceny nawet dla opcji waniliowych

-  S. L. Heston, *A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options*. The Review of Financial Studies Vol. 6, No. 2, 1993
-  R. Rebonato, *Volatility and Correlation. The Perfect Hedger and the Fox*. Wiley, 2004
-  U. Wystup, *FX Options and Structured Products*. Wiley, 2006